측도와 푸리에 변환

변정윤

목차

제 I 편

르베그 적분

제 1 장

적분

1.1 1.1절

연습문제

문제 1.1.1. f가 $(0,a)$ 위에서 르베그 적분가능이고 $g(x) = \int_x^a t^{-1}f(t)dt$ 이면 g는 $(0,a)$ 위에서 적분가능이고 $\int_0^a g(x)dx = \int_0^a f(x)dx$ 임을 보여라.

문제 1.1.2. $e^{-sxy}\sin x$를 x와 y에 대하여 적분하여 $s>0$일 때 $\int_0^\infty e^{-sx}x^{-1}\sin x dx = \tan^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)$ 임을 보여라. $\Big($힌트: $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \frac{1}{\tan\theta}$가 유용할 것이다. 문제 **??**(d)를 참조하라.$\Big)$

문제 1.1.3. $e^{-sx}\sin 2xy$를 x와 y에 대하여 적분하여 $s>0$일 때 $\int_0^\infty e^{-sx}x^{-1}\sin^2 x dx = \frac{1}{4}\ln\left(1+\frac{4}{s^2}\right)$ 임을 보여라.

문제 1.1.4. (a) $\int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx = \infty$ 임을 보여라.

(b) $e^{-xy}\sin x$를 x와 y에 대하여 적분하여 $\lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$ 임을 보여라. ((a)와는 달리, $b\to\infty$일 때의 적분을 다룰 때 주의해야 한다.[1])

문제 1.1.5. $x,y>0$에 대하여 $\Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ 임을 보여라. ($\Gamma(x)\Gamma(y)$를 2중적분으로 표현하고 지수함수의 변수를 새로운 적분변수로 사용하여라.)

문제 1.1.6. f가 $[0,\infty)$에서 연속일 때 $\alpha>0$와 $x\geq 0$에 대하여

$$I_\alpha f(x) = \Gamma(\alpha)^{-1}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)dt$$

라 하자. $I_\alpha f$는 f의 **제 α 분수적분**(αth fractional integral)이라 한다.

(a) 임의의 $\alpha,\beta>0$에 대하여 $I_{\alpha+\beta}f = I_\alpha(I_\beta f)$ 임을 보여라. (문제 1.1.5를 사용하여라.)

(b) $n\in\mathbb{N}$이면 $I_n f$는 f의 n계 역도함수(nth order antiderivative)임을 보여라.

문제 1.1.7. 함수 $G_n:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $G_n(r,\varphi_1,\cdots,\varphi_{n-2},\theta) = (x_1,\cdots,x_n)$을 다음과 같이 정의하자:

$$x_1 = r\cos\varphi_1,$$

[1]물론 이 문제는 보조정리 **??**에서와 같이 컨투어 적분을 이용하여 간단하게 풀 수도 있다!

$$x_2 = r \sin\varphi_1 \cos\varphi_2,$$

$$x_3 = r \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \cos\varphi_3,$$

$$\vdots$$

$$x_{n-1} = r \sin\varphi_1 \cdots \sin\varphi_{n-2} \cos\theta,$$

$$x_n = r \sin\varphi_1 \cdots \sin\varphi_{n-2} \sin\theta$$

다음 각각을 보여라.

(a) G_n 은 $\mathbb{R}^n$ 을 $\mathbb{R}^n$ 으로 보내는 전사(surjective)함수이고 $|G(r, \varphi_1, \cdots, \varphi_{n-2}, \theta)| = |r|$ 이다.

(b) $\det D_{(r,\varphi_1,\cdots,\varphi_{n-2},\theta)} G_n = r^{n-1} \sin^{n-2}\varphi_1 \sin^{n-3}\varphi_2 \cdots \sin\varphi_{n-2}$.

(c) $\Omega = (0,\infty) \times (0,\pi)^{n-2} \times (0, 2\pi)$ 라 하자. 그러면 $G_n|_\Omega$ 는 디피오모피즘이고 $m(\mathbb{R}^n - G_n(\Omega)) = 0$ 이다.

(d) $F(\varphi_1, \cdots, \varphi_{n-2}, \theta) = G_n(1, \varphi_1, \cdots, \varphi_{n-2}, \theta)$ 이고 $\Omega' = (0,\pi)^{n-2} \times (0, 2\pi)$ 라 하자. 그러면 $(F|_{\Omega'})^{-1}$ 는 S^{n-1} 위의 어떤 σ_{n-1}-영집합을 제외한 모든 점에서 좌표계를 정의하고, 측도 σ_{n-1} 은 이들 좌표에 의하여 다음과 같이 주어진다:

$$d\sigma_{n-1}(\varphi_1, \cdots, \varphi_{n-2}, \theta) = \sin^{n-2}\varphi_1 \sin^{n-3}\varphi_2 \cdots \sin\varphi_{n-2} d\varphi_1 \cdots d\varphi_{n-2} d\theta$$

제 II 편

분포와 푸리에 변환

제 2 장

분포

2.1 2.1절

연습문제

문제 2.1.1. 함수 $f(x)$에 대하여

$$\langle Pf, \varphi\rangle = PV\int_{-\infty}^{\infty}(f(x)\text{의 선형사상})\varphi(x)dx$$

와 같이 정의되는 펑셔널을 f의 **유사함수(pseudofunction)** Pf라 한다. 기호 $PV\int_{-\infty}^{\infty}$는 코시 주값(Cauchy principal value) $\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{\infty}\right)$을 뜻한다.

다음 각각의 유사함수로서 정의된 $D(\mathbb{R})$에서의 펑셔널들이 분포임을, 즉 $D'(\mathbb{R})$에 속함을 보이고 각각의 받침을 구하여라:

(a) $\left\langle P\frac{1}{x}, \varphi\right\rangle = PV\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx$

(b) $\left\langle P\frac{1}{x^2}, \varphi\right\rangle = PV\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2}dx$

(c) $\left\langle P\frac{1}{x^3}, \varphi\right\rangle = PV\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)-x\varphi'(0)}{x^3}dx$

(d) $\left\langle P\frac{\cos kx}{x}, \varphi\right\rangle = PV\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos kx}{x}\varphi(x)dx$

참고 2.1.1. 문제 2.1.1의 (a)에서는 $\left\langle P\frac{1}{x}, \varphi\right\rangle = PV\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx$인데 왜 (b),(c)에서는

$$\left\langle P\frac{1}{x^2}, \varphi\right\rangle = PV\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x^2}dx, \quad \left\langle P\frac{1}{x^3}, \varphi\right\rangle = PV\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x^3}dx$$

로 정의되지 않는가? 이것은 (분포의 미분으로서)

$$\frac{d}{dx}\left(P\frac{1}{x}\right) = -P\frac{1}{x^2}, \quad \frac{d}{dx}\left(P\frac{1}{x^2}\right) = -P\frac{2}{x^3}$$

가 성립하게 하기 위해서이다. 이와 같이 유사함수의 미분의 행태가 보통 함수의 미분과 비슷해지도록 유사함수의 정의를 조정하는 것을 **아다마르 정규화(Hadamard regularization)**라 한다. 문제 **??**에서 설명할 것이다.

문제 2.1.2. 문제 2.1.1(d)에서 $k\to\infty$일 때 $P\frac{\cos kx}{x}$의 극한을 구하여라.

문제 2.1.3. 국소적으로 적분가능한 $\mathbb{R}^n$ 에서의 두 함수 f, g가 똑같은 정칙 분포를 결정한다고 하자. 즉, 임의의 $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ 에 대하여 $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\varphi(x)dx$ 라 하자. f와 g는 $\mathbb{R}^n$ 의 거의 모든 곳에서(almost everywhere) 같음을 증명하여라.

문제 2.1.4. 테스트함수의 공간 $D(\mathbb{R})$ 은 분포의 공간 $D'(\mathbb{R})$ 에 포함됨을 증명하여라.

문제 2.1.5. (a) $f \in L_1(\mathbb{R}, dx)$ 이고 $f_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1} f(x/\varepsilon)$ 이라 하자. $\lim_{\varepsilon \to 0+} f_\varepsilon$ 이 $D'(\mathbb{R})$ 에 존재하고 $c \cdot \delta(x)$ 와 같음을 증명하여라. (단, $c = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ 이다.)

(b) 다음 등식을 증명하여라: $\lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} e^{-x^2/\varepsilon} = \sqrt{\pi}\delta(x)$, $\lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} = \pi\delta(x)$

참고 2.1.2. 위 문제 2.1.5(a)는 문제 1.1.4와 거의 같은 의미임에 주목할 것. 문제 2.1.5(a)는 단지 문제 1.1.4를 $D(\mathbb{R})$ 에 속하는 함수들에 적용한 것으로 간주할 수도 있다.

문제 2.1.6. $D'(\mathbb{R})$ 에서 $\lim_{\varepsilon \to 0+} \sin(x/\varepsilon)$ 이 존재하는가?

문제 2.1.7. $D'(\mathbb{R})$ 에서 $\frac{1}{x \pm i0} = \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{x \pm i\varepsilon}$ 이라 정의하자. **소코츠키 공식**(Sokhotskii identity) $\frac{1}{x \pm i0} = P\frac{1}{x} \pm \pi i \delta(x)$ 을 증명하여라.

문제 2.1.8. 식 $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(x)dx = \varphi(0)$ 에 의하여 정의되는 디랙 델타 함수는 정칙 분포가 아님을 증명하여라.

문제 2.1.9. 다음 분포의 받침을 구하여라:

(a) $\varphi \mapsto \int_{-1}^{1} |x|\varphi'(x)dx$

(b) $\varphi \mapsto \int_{-1}^{1} (\operatorname{sgn} x)\varphi'(x)dx$

참고문헌

Boothby. (1986). An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry (2nd ed.). Academic Press.

Folland. (1999). Real Analysis (2nd ed.). John Wiley and Sons.

Kirillov, & Gvishiani. (1982). Theorems and Problems in Functional Analysis. Springer-Verlag.

Munkres. (2000). Topology (2nd ed.). Prentice-Hall.

Pinter, C. C. (2014). A Book of Set Theory. Dover Publications, Inc.

Rudin. (1976). Principles of Mathematical Analysis (3rd ed.). McGraw-Hill.

Spiegel, M. (1974). Schaum's Outline of Theory and Problems of Fourier Analysis. McGraw-Hill, Inc.

Stein, & Shakarchi. (2003). Princeton Lectures in Analysis I Fourier Analysis. Princeton University Press.

Stein, & Shakarchi. (2005). Princeton Lectures in Analysis III Real Analysis. Princeton University Press.

Teschl. (2012). Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems. American Mathematical Society(Graduate Studies in Mathematics 140).

Thomas, Weir, Hass, & Giordano. (2005). Thomas' Calculus (11th ed.). Pearson.

Torchinsky, A. (2018). Real variables. CRC Press.

Zill, & Cullen. (2000). Advanced Engineering Mathematics (2nd ed.). Jones and Bartlett.

팬더슈타인. (2024). 컨투어 적분. Pandastein.com.

국문색인

영문색인