

측도와 푸리에 변환

변정윤

목차

제 I 편 르베그 적분	1
제 1장 적분	3
1.1 1.1절	3
제 II 편 분포와 푸리에 변환	5
제 2장 분포	7
2.1 2.1절	7
참고문헌	9
국문색인	11
영문색인	13

제 I 편

르베그 적분

제 1 장

적분

1.1 1.1절

연습문제

문제 1.1.1. f 가 $(0, a)$ 위에서 르베그 적분가능이고 $g(x) = \int_x^a t^{-1} f(t) dt$ 이면 g 는 $(0, a)$ 위에서 적분가능이고 $\int_0^a g(x) dx = \int_0^a f(x) dx$ 임을 보여라.

문제 1.1.2. $e^{-sx} \sin x$ 를 x 와 y 에 대하여 적분하여 $s > 0$ 일 때 $\int_0^\infty e^{-sx} x^{-1} \sin x dx = \tan^{-1} \left(\frac{1}{s} \right)$ 임을 보여라.
(힌트: $\tan \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \frac{1}{\tan \theta}$ 가 유용할 것이다. 문제 ??(d)를 참조하라.)

문제 1.1.3. $e^{-sx} \sin 2xy$ 를 x 와 y 에 대하여 적분하여 $s > 0$ 일 때 $\int_0^\infty e^{-sx} x^{-1} \sin^2 x dx = \frac{1}{4} \ln \left(1 + \frac{4}{s^2} \right)$ 임을 보여라.

문제 1.1.4. (a) $\int_0^\infty \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = \infty$ 임을 보여라.

(b) $e^{-xy} \sin x$ 를 x 와 y 에 대하여 적분하여 $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ 임을 보여라. ((a)와는 달리, $b \rightarrow \infty$ 일 때의 적분을 다룰 때 주의해야 한다.¹⁾)

문제 1.1.5. $x, y > 0$ 에 대하여 $\Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$ 임을 보여라. ($\Gamma(x)\Gamma(y)$ 를 2중적분으로 표현하고 지수함수의 변수를 새로운 적분변수로 사용하여라.)

문제 1.1.6. f 가 $[0, \infty)$ 에서 연속일 때 $\alpha > 0$ 와 $x \geq 0$ 에 대하여

$$I_\alpha f(x) = \Gamma(\alpha)^{-1} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt$$

라 하자. $I_\alpha f$ 는 f 의 제 α 분수적분(α th fractional integral)이라 한다.

(a) 임의의 $\alpha, \beta > 0$ 에 대하여 $I_{\alpha+\beta} f = I_\alpha(I_\beta f)$ 임을 보여라. (문제 1.1.5를 사용하여라.)

(b) $n \in \mathbb{N}$ 이면 $I_n f$ 는 f 의 n 계 역도함수(n th order antiderivative)임을 보여라.

문제 1.1.7. 함수 $G_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $G_n(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-2}, \theta) = (x_1, \dots, x_n)$ 을 다음과 같이 정의하자:

$$x_1 = r \cos \varphi_1,$$

¹⁾물론 이 문제는 보조정리 ??에서와 같이 컨투어 적분을 이용하여 간단하게 풀 수도 있다!

$$x_2 = r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2,$$

$$x_3 = r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3,$$

⋮

$$x_{n-1} = r \sin \varphi_1 \cdots \sin \varphi_{n-2} \cos \theta,$$

$$x_n = r \sin \varphi_1 \cdots \sin \varphi_{n-2} \sin \theta$$

다음 각각을 보여라.

(a) G_n 은 \mathbb{R}^n 을 \mathbb{R}^n 으로 보내는 전사(surjective) 함수이 고 $|G(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-2}, \theta)| = |r|$ 이다.

(b) $\det D_{(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-2}, \theta)} G_n = r^{n-1} \sin^{n-2} \varphi_1 \sin^{n-3} \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{n-2}$.

(c) $\Omega = (0, \infty) \times (0, \pi)^{n-2} \times (0, 2\pi)$ 라 하자. 그러면 $G_n|_\Omega$ 는 디피오모피즘이고 $m(\mathbb{R}^n - G_n(\Omega)) = 0$ 이다.

(d) $F(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-2}, \theta) = G_n(1, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-2}, \theta)$ 이 고 $\Omega' = (0, \pi)^{n-2} \times (0, 2\pi)$ 라 하자. 그러면 $(F|_{\Omega'})^{-1}$ 는 S^{n-1} 위의 어떤 σ_{n-1} -영집합을 제외한 모든 점에서 좌표계를 정의하고, 측도 σ_{n-1} 은 이를 좌표에 의하여 다음과 같이 주어진다:

$$d\sigma_{n-1}(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-2}, \theta) = \sin^{n-2} \varphi_1 \sin^{n-3} \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{n-2} d\varphi_1 \cdots d\varphi_{n-2} d\theta$$

제 II 편

분포와 푸리에 변환

제 2 장

분포

2.1 2.1절

연습문제

문제 2.1.1. 함수 $f(x)$ 에 대하여

$$\langle Pf, \varphi \rangle = PV \int_{-\infty}^{\infty} (f(x) \text{의 선형사상}) \varphi(x) dx$$

와 같이 정의되는 평셔널을 f 의 유사함수(pseudofunction) Pf 라 한다. 기호 $PV \int_{-\infty}^{\infty}$ 는 코시 주값(Cauchy principal value) $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty} \right)$ 을 뜻한다.

다음 각각의 유사함수로서 정의된 $D(\mathbb{R})$ 에서의 평셔널들이 분포임을, 즉 $D'(\mathbb{R})$ 에 속함을 보이고 각각의 받침을 구하여라:

$$(a) \left\langle P \frac{1}{x}, \varphi \right\rangle = PV \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx$$

$$(b) \left\langle P \frac{1}{x^2}, \varphi \right\rangle = PV \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^2} dx$$

$$(c) \left\langle P \frac{1}{x^3}, \varphi \right\rangle = PV \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0)}{x^3} dx$$

$$(d) \left\langle P \frac{\cos kx}{x}, \varphi \right\rangle = PV \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos kx}{x} \varphi(x) dx$$

참고 2.1.1. 문제 2.1.1의 (a)에서는 $\left\langle P \frac{1}{x}, \varphi \right\rangle = PV \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx$ 인데 왜 (b),(c)에서는

$$\left\langle P \frac{1}{x^2}, \varphi \right\rangle = PV \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx, \quad \left\langle P \frac{1}{x^3}, \varphi \right\rangle = PV \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x^3} dx$$

로 정의되지 않는가? 이것은 (분포의 미분으로서)

$$\frac{d}{dx} \left(P \frac{1}{x} \right) = -P \frac{1}{x^2}, \quad \frac{d}{dx} \left(P \frac{1}{x^2} \right) = -P \frac{2}{x^3}$$

가 성립하게 하기 위해서이다. 이와 같이 유사함수의 미분의 행태가 보통 함수의 미분과 비슷해지도록 유사함수의 정의를 조정하는 것을 아다마르 정규화(Hadamard regularization)라 한다. 문제 ??에서 설명할 것이다.

문제 2.1.2. 문제 2.1.1(d)에서 $k \rightarrow \infty$ 일 때 $P \frac{\cos kx}{x}$ 의 극한을 구하여라.

문제 2.1.3. 국소적으로 적분가능한 \mathbb{R}^n 에서의 두 함수 f, g 가 똑같은 정칙 분포를 결정한다고 하자. 즉, 임의의 $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ 에 대하여 $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\varphi(x)dx$ 라 하자. f 와 g 는 \mathbb{R}^n 의 거의 모든 곳에서(almost everywhere) 같음을 증명하여라.

문제 2.1.4. 테스트함수의 공간 $D(\mathbb{R})$ 은 분포의 공간 $D'(\mathbb{R})$ 에 포함됨을 증명하여라.

문제 2.1.5. (a) $f \in L_1(\mathbb{R}, dx)$ 이고 $f_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1}f(x/\varepsilon)$ 이라 하자. $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} f_\varepsilon$ $\in D'(\mathbb{R})$ 에 존재하고 $c \cdot \delta(x)$ 와 같음을 증명하여라. (단, $c = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ 이다.)

(b) 다음 등식을 증명하여라: $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} e^{-x^2/\varepsilon} = \sqrt{\pi}\delta(x)$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} = \pi\delta(x)$

참고 2.1.2. 위 문제 2.1.5(a)는 문제 1.1.4와 거의 같은 의미임에 주목할 것. 문제 2.1.5(a)는 단지 문제 1.1.4를 $D(\mathbb{R})$ 에 속하는 함수들에 적용한 것으로 간주할 수도 있다.

문제 2.1.6. $D'(\mathbb{R})$ 에서 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \sin(x/\varepsilon)$ 이 존재하는가?

문제 2.1.7. $D'(\mathbb{R})$ 에서 $\frac{1}{x \pm i0} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{1}{x \pm i\varepsilon}$ 이라 정의하자. 소코츠키 공식(Sokhotskii identity) $\frac{1}{x \pm i0} = P\frac{1}{x} \pm \pi i\delta(x)$ 을 증명하여라.

문제 2.1.8. 식 $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(x)dx = \varphi(0)$ 에 의하여 정의되는 디랙 델타 함수는 정칙 분포가 아님을 증명하여라.

문제 2.1.9. 다음 분포의 반침을 구하여라:

$$(a) \varphi \mapsto \int_{-1}^1 |x|\varphi'(x)dx$$

$$(b) \varphi \mapsto \int_{-1}^1 (\operatorname{sgn} x)\varphi'(x)dx$$

참고문헌

- Boothby. (1986). *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry* (2nd ed.). Academic Press.
- Folland. (1999). *Real Analysis* (2nd ed.). John Wiley and Sons.
- Kirillov, & Gvishiani. (1982). *Theorems and Problems in Functional Analysis*. Springer-Verlag.
- Munkres. (2000). *Topology* (2nd ed.). Prentice-Hall.
- Pinter, C. C. (2014). *A Book of Set Theory*. Dover Publications, Inc.
- Rudin. (1976). *Principles of Mathematical Analysis* (3rd ed.). McGraw-Hill.
- Spiegel, M. (1974). *Schaum's Outline of Theory and Problems of Fourier Analysis*. McGraw-Hill, Inc.
- Stein, & Shakarchi. (2003). *Princeton Lectures in Analysis I Fourier Analysis*. Princeton University Press.
- Stein, & Shakarchi. (2005). *Princeton Lectures in Analysis III Real Analysis*. Princeton University Press.
- Teschl. (2012). *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems*. American Mathematical Society(Graduate Studies in Mathematics 140).
- Thomas, Weir, Hass, & Giordano. (2005). *Thomas' Calculus* (11th ed.). Pearson.
- Torchinsky, A. (2018). *Real variables*. CRC Press.
- Zill, & Cullen. (2000). *Advanced Engineering Mathematics* (2nd ed.). Jones and Bartlett.
- 팬더슈타인. (2024). 컨투어 적분. Pandastein.com.

국문색인

분수적분, 3

아다마르 정규화, 7

소코츠키 공식, 8

유사함수, 7

영문색인

fractional integral, 3

pseudofunction, 7

Hadamard regularization, 7

Sokhotskii identity, 8